Il seguente problema viene proposto come esercitazione per la preparazione ad una prova scritta di Matematica e Fisica per l'esame di stato

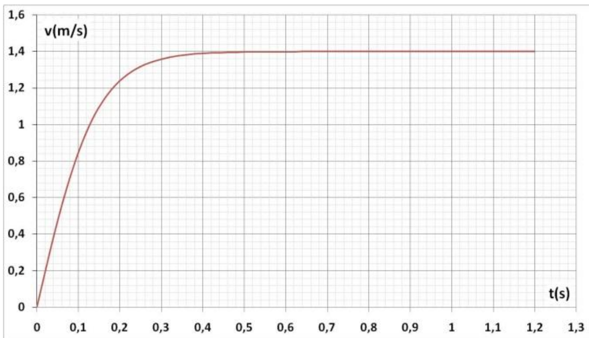
prof. Ilarione Cormio

Problema

Quando un corpo leggero viene lasciato cadere, la forza di attrito prodotta su di esso dall'aria fa si che la sua velocità aumenti tendendo asintoticamente ad un valore limite v_L.
Utilizzando un modello matematico secondo il quale la forza di attrito prodotta dall'aria aumenta all'aumentare della velocità del corpo secondo la relazione $F_{att} = kv^2$, dove k è il coefficiente di attrito, si deduce che la velocità del corpo in caduta è descritta da una funzione del tipo:

$$v(t) = \alpha \cdot \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$$

nella quale v è la velocità in m/s, t è il tempo in secondi, α e β hanno valori reali positivi.
Nel caso in cui il corpo in caduta sia un pirottino da pasticceria di massa 0,7 g e diametro 10 cm, il grafico di $v(t)$ è il seguente:



Pirottino

Punto1
Determinare il valore dei parametri α e β, con le rispettive unità di misura, in modo che la funzione $v(t)$ soddisfi le seguenti condizioni:

a) il valore della funzione $v(t)$ deve tendere, asintoticamente, a quello della velocità limite $v_L = 1{,}4\ m/s$;
b) l'accelerazione $a = dv/dt$ del pirottino all'istante iniziale $t = 0$, deve coincidere con l'accelerazione di gravità $g = 9{,}8\ \mathrm{m}/s^2$.

Descrivere l'andamento delle forze agenti sul pirottino durante la caduta e giustificare perché la funzione $v(t)$ deve soddisfare le precedenti condizioni.

Punto 2
Dal grafico di $v(t)$ si deduce che per $t \geq 0{,}5\ s$ la velocità del pirottino può essere considerata costante. Applicando il principio di inerzia a questa fase della caduta e utilizzando nuovamente la condizione che l'accelerazione alla partenza deve essere uguale a g, esprimere i coefficienti di $v(t)$ in funzione della massa *m* del pirottino, del coefficiente di attrito *k* e dell'accelerazione di gravità g.

Punto 3
Dal punto precedente si deduce che la velocità del pirottino dipende sia dal tempo t che dal coefficiente di attrito k. Posto:

$$b = 2t\sqrt{\frac{g}{m}}$$

la funzione velocità può essere scritta nella forma:

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{e^{b\sqrt{k}} + 1} \cdot \frac{e^{b\sqrt{k}} - 1}{\sqrt{k}}$$

Determinare come si modifica la funzione v se il parametro *k* diminuisce sempre più tendendo ad annullarsi. Interpretare il significato fisico del risultato ottenuto.

Punto 4

Data la seguente funzione

$$F(t) = A \ln\left(\frac{e^{\beta t} + 1}{2}\right) + Bt$$

con A e B numeri reali positivi e β=14 s^{-1}, determinare il valore dei coefficienti A e B per i quali essa è una primitiva della funzione $v(t)$.

Calcolare la *media integrale* della funzione $v(t)$ nell'intervallo compreso tra $t = 0\ s$ e $t = 1\ s$, e attribuire un significato fisico al valore ottenuto.

Punto 5

La velocità media del pirottino durante l'intervallo di caduta, rappresenta un valore che approssima per difetto la velocità limite v_L. Questa approssimazione migliora all'aumentare del tempo di caduta.

Determinare l'espressione della velocità media $v_m(\tau)$ in funzione del tempo di caduta τ.

Si vuole calcolare il tempo di caduta τ_0 per il quale la differenza percentuale tra la velocità limite v_L e la velocità media $v_m(\tau_0)$ è uguale al 5%, ovvero:

$$\frac{v_L - v_m(\tau_0)}{v_L} = 0{,}05$$

Verificare che questa equazione ammette una soluzione nell'intervallo $[1{,}90\ s;\ 2{,}00\ s]$ e calcolarne il valore approssimato alla seconda cifra decimale descrivendo la procedura utilizzata.